Devoir Maison 1

Exercice 1

(adapté de ENSAIT 1988)

Partie I

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications f continues sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Soit F l'ensemble des applications f continues sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. (a) Montrer que, pour tous réels $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ on a $|ab|\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$
   (b) Montrer que tout élément f de F appartient à E.
   (c) En déduire que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
2. Soit $\begin{array}{rccl} f & : &]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \dfrac{1}{t^\alpha} \end{array}$ où $\alpha>0$.
   Pour quelles valeurs de α, f est-elle un élément de F ?
3. Soit $\begin{array}{rccl} f & : &]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha} \end{array}$ où $\alpha>0$.
   Pour quelles valeurs de α, f est-elle un élément de F ?
4. Soit $\begin{array}{rccl} f & : &]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \ln(t)^n \end{array}$ où $n\in\mathbb{N}$.
   f est-elle un élément de E ? de F ?

Partie II

Soit G le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications f continues sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Soit $\begin{array}{rccl} f & : &]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \dfrac{\ln^n(t)}{(1-t)^\alpha} \end{array}$ où $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.
   Déterminer à quelle condition sur α et n, f est un élément de G.
2. Soit $\begin{array}{rccl} f & : &]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \dfrac{\ln(t)}{(1+t)\sqrt{1-t^2}} \end{array}$
   (a) Montrer que f est un élément de G.
   (b) Étudier les variations de la fonction $\varphi : t\mapsto\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$ sur $]0,1[$.
   (c) On note $I=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I=\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$
   On pourra poser le changement de variable $x=\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$.
   (d) Déterminer quatre réels (a,b,c,d) tels que

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\qquad \frac{4x^2}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x+1}+\frac{d}{x-1}$$

   (e) En déduire la valeur de I via une intégration par parties